Koło matematyczne.
zestaw 10/2016/2017

1. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą równanie
$$999999 \cdot n = 111\ldots 11.$$

2. Przystające okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi jeszcze w punktach M i N, przy czym A należy do odcinka MN. Okrąg o średnicy AB przecina prostą MN w punktach A i S. Udowodnij, że $MS = NS$.

3. Liczby całkowite dodatnie spełniają warunek
$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2.$$
Wykaż, że liczba $a + b + c + d$ jest liczbą złożoną.

4. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ umieszczono kwadrat $PQRS$. Każdy z punktów P, Q, R, S łączymy z najbliższym od niego wierzchołkiem kwadratu $ABCD$. Powstały odcinki AP, BQ, CR, DS. Udowdonij, że suma pól czworokątów $ABQP$ i $CDSR$ jest równa sumie pól czworokątów $DAPS$ i $BCRQ$.

5. Udowodnij, że spośród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych można wybrać takie dwie a, b, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez $2n$.

6. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Liczba m jest względnie pierwsza z każdą z liczb k_i. Wykaż, że równanie
$$x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_n^{k_n} = y^m$$
ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.