Koło matematyczne.

zestaw 12/2016/2017

1. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Środek okręgu o_2 leży na okręgu o_1. Styczna do okręgu o_1 w punkcie B przecina okrąg o_2 w punkcie C. Wykaż, że $AB = BC$.

2. Udowodnij, że każda liczba pierwsza różna od 2 i 3 jest pewnym wyrazem ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{24n+1}$.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych m, n, gdzie $m > n > 0$, spełniona jest nierówność
$$NWW(m,n) + NWW(m+1, n+1) > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}.$$

4. Dane są trzy trójmiany kwadratowe o różnych współczynnikach przy x^2. Wiadomo, że wykresy każdych dwóch z nich mają dokładnie jeden punkt wspólny. Wykaż, że istnieje punkt wspólny wykresów wszystkich trzech trójmianów.

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D i E są spodkami wysokości tego trójkąta, poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Prosta przechodząca przez punkt M i prostopadła do prostej DE przecina prostą AD w punkcie K. Udowodnij, że punkty A, M, K, E leżą na jednym okręgu.

6. Czy istnieją liczby naturalne a i d względnie pierwsze, $d > a > 1$, takie, że dla każdej liczby naturalnej k można znaleźć liczbę naturalaną n, dla której $a + nd$ jest k-tą potęgą liczby naturalnej?