Koło matematyczne.

zestaw 14/2016/2017

1. W równoległoboku $ABCD$ kąt B jest rozwarty. Punkt E leży na boku DC. Prosta k przechodzi przez A i jest równoległa do BE. Punkty F i G leżą na prostej k tak, że czworokąt $BEFG$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że pola czworokątów $ABCD$ i $BEFG$ są równe.

2. Liczby całkowite dodatnie a, m, n spełniają warunki:

$$a > 1, \quad a^m + 1 | a^n + 1.$$

Udowodnij, że $m|n$.

3. Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, do której zbioru wartości należy liczba 1 i która spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zależność

$$f(f(n)) = f(n) + 1.$$

4. Rozstrzygnij, czy istnieje taki zbiór S złożony z 1000 liczb całkowitych dodatnich, że suma liczb dowolnego niepustego podzbioru zbioru S nie jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg o o średnicy AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach E i F. Styczne do okręgu o w punktach E i F przecinają się w punkcie P. Wykaż, że proste CP i AB są prostopadłe.

6. Rozważam alfabet złożony z n liter, a w nim słowa o następującej własności: między dwoma wystąpieniami którejkolwiek litery, każda litera pojawia się co najwyżej jeden raz (tzn. zabronione są podciągi $x \ldots y \ldots y \ldots x$, również dla $x = y$) Ile jest takich słów o maksymalnej długości?