

Koło matematyczne.

zestaw 15/2016/2017

1. Udowodnij, że ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ można wybrać takich 120 liczb, że żadne trzy z nich nie są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
2. Czy kwadrat 13×13 można pokryć prostokątami 4×1 tak, aby tylko środkowe pole nie było pokryte?
3. Rozstrzygnij, czy istnieje 1000 kolejnych liczb naturalnych, wśród których znajduje się dokładnie pięć liczb pierwszych.
4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Punkt D leży na boku AB , przy czym $BD = BC$. Wykaż, że $CD = AB$.
5. Niech \mathbb{N} oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełnia warunek: jeżeli $m - n$ jest liczbą pierwszą, to $f(m) \neq f(n)$. Czy zbiór wartości funkcji f może być skończony? Jeśli tak, to wyznacz najmniejszą możliwą liczbę jego elementów.
6. Dwusieczna kąta ABC trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie E oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D . Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AE i CD . Udowodnij, że punkty M, B, C, N leżą na jednym okręgu.