Koło matematyczne.
zestaw 20/2016/2017

1. Udowodnij, że dwudziestocyfrowa liczba zaczynająca się jedenastoma cyframi 1 nie jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{1001} \in \{-1, 1\}$, że
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{1000}x_{1001} + x_{1001}x_1 = 499.$$

3. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina każdą jego krawędź boczną. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

4. Liczba rzeczywista x ma następującą własność: dla każdej liczby całkowitej dodatniej q istnieje taka liczba całkowita p, że
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{3q}.$$
Dowieść, że liczba x jest całkowita.

5. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany w punkcie $R \neq A$, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkty K i L są środkami boków odpowiednio BC i AC. Pokaż, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

6. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej m leży środek sfery wpisanej i środek sfery opisanej na czworościanie. Udowdonij, że jeśli prosta m przecina odcinek AB, to $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.