Koło matematyczne.

zestaw 22/2016/2017

1. Trójkąt o bokach będących liczbami naturalnymi jest opisany na okręgu o promieniu 1. Oblicz długości jego boków.

2. Liczby a i b są całkowite dodatnie przy czym $b > 2$. Udowodnij, że liczba $2^a + 1$ nie jest podzielna przez $2^b - 1$.

3. Na tablicy zapisoano liczby 1 i 2. Jeśli na tablicy znajdują się już liczby m i n, to można do nich dopisać liczbę $mn+m+n$. Wykaż, że na tablicy mogą wystąpić jedynie liczby postaci $2^a \cdot 3^b - 1$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

4. Dany jest okrąg o. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono proste styczne do okręgu o w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach C i D. Prosta przechodząca przez B i równoległa do prostaj CD przecin aokrąg o w puntkach B i E. Udowodnij, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka CD.

5. Udowodnij, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratmi liczb całkowitych.

6. Udowodnij, że każdy dziewięcioelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B, że suma liczb w zbiorze A jest równa sumie liczb w zbiorze B.