

**Koło matematyczne.**  
zestaw 25/2016/2017

1. Liczby rzeczywiste  $a$  oraz  $b$  spełniają równości

$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1 \quad \text{oraz} \quad b^3 - 3b^2 + 5b = 5.$$

Wyznacz  $a + b$ .

2. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym

$$\angle BAD = \angle ABC \quad \text{oraz} \quad BC = 2AD.$$

Na boku  $AB$  tego czworokąta wybrano taki punkt  $E$ , że  $\angle ADE = \angle BCD$ . Udowodnij, że  $CD = DE$ .

3. Dana jest taka liczba naturalna  $n$ , dla której liczba  $n + 1$  jest podzielna przez 24. Wykaż, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby  $n$  jest podzielna przez 24.
4. W czworokącie  $ABCD$  zachodzą równości  $AC = BD$  oraz  $AD = BC$ . Udowodnij, że środek sfery wpisanej i środek sfery opisanej na tym czworokącie leżą na prostej łączącej środki  $AB$  i  $CD$ .
5. Ciąg  $(a_n)$  jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 5}{a_n}.$$

Udowodnij, że wszystkie jego wyrazy są liczbami całkowitymi.

6. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną  $a$  taką, że  $1971 \mid 50^n + a \cdot 23^n$  dla nieparzystych liczb naturalnych  $n$ .