

**Koło matematyczne.**

zestaw 5/2016/2017

1. Kwadrat o boku długości  $n$  podzielono na  $n^2$  kwadratów jednostkowych. Każdy z tych kwadratów pomalowano na biało lub na czarno w taki sposób, że każde cztery kwadraty, których środki są wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do boków dużego kwadratu nie są pomalowane przy pomocy jednego koloru. Jakie największe może być  $n$ .
2. Dane są liczby dodatnie  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ . Wykazać, że

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Czy można tak przeciąć sześciian płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt?
4. Punkt  $S$  leży wewnątrz sześciokąta foremnego  $ABCDEF$ . Udowodnij, że suma pól trójkątów  $ABS$ ,  $CDS$ ,  $EFS$  jest równa połowie pola sześciokąta  $ABCDEF$ .
5. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami  $1, 2, \dots, 20$ , aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdego czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43?
6. Punkt  $D$  leży na boku  $BC$  trójkąta  $ABC$ , w którym  $AB = AC$ . Punkt  $F$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ACD$ , wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Okrąg przechodzący przez punkty  $B, D, F$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $E$ . Udowodnij, że

$$CD \cdot EF + DF \cdot AE = BD \cdot AF.$$