

Koło matematyczne.

zestaw 6/2016/2017

1. Dane są liczby dodatnie a i b . Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$\frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(ax + bz)(az + bx)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$$

dla dodatnich liczb x , y i z .

2. Jaka jest największa liczba x , dla której istnieją liczby a , b , c i d takie, że

$$a + b + c + d + x = 8, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 = 16?$$

3. Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Rozwiąż równanie

$$f(f(f(f(f(x)))))) = 0.$$

4. W trójkącie ABC długość środkowej CM jest równa długości boku AB . Punkt D jest symetryczny do punktu C względem punktu A . Punkt E jest symetryczny do punktu M względem punktu B . Wykazać, że proste DM i CE są prostopadłe.
5. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n , że wypisując cyfry liczby n w odwrotnym porządku, uzyskamy liczbę $3n$.
6. Ciąg nieskończony a_0, a_1, a_2, \dots jest określony wzorem rekurencyjnym

$$4a_{n+1} = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots;$$

wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(-1; 1)$. Wykaż, że szereg nieskończony $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny. Czy jego suma jest liczbą wymierną?