Koło matematyczne.
zestaw 7/2016/2017

1. Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wykazać, że liczba

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^2$$

jest parzysta.

2. Dane są parami względnie pierwsze liczby p, q i r. Czy równanie

$$x^p + y^q = z^r$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych?

3. Liczby całkowite a, b, c są takie, że również sumy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

są całkowite. Udowodnij, że $|a| = |b| = |c|$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < BC < CA$. Punkty M i N są odpwiednio środkami boków AB i BC. Punkty P i Q są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio z bokami AC i BC. Odcinki PQ i MN przecinają się w punkcie S. Wykaż, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

5. Na pewnym polu nieograniczonej szachownicy stoją cztery pionki. W jednym kroku usuwamy pionek z wybranego pola P szachownicy, stawiając jendocześnie po jednym pionku na dwa pola, które sąsiadują z góry i z prawej strony z polem P. Rozstrzygnij, czy można po skończonej liczbie kroków doprowadzić do sytuacji, w której na każdym polu stoi co najwyżej jeden pionek.

6. Liczby całkowite k, m, n spełniają równanie

$$\frac{m}{n} = \frac{k^2 + m^2}{k^2 + n^2}$$

oraz warunek: $k^2 + m^2 + n^2$ jest liczbą pierwszą. Udowodnij, że $m = n$.