Koło matematyczne.
zestaw 8/2016/2017

1. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q spełniające równanie
$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

2. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu R oraz jest opisany na okręgu o środku I i promieniu r. Dwusieczna AI przecina okrąg opisany w punkcie D. Udowodnij, że $AI \cdot ID = 2Rr$.

3. Na każdym polu szachownicy 10×10 napisano jedną z liczb $1, 2, \ldots, 10$. Okazało się, że każde dwie liczby napisane na polach mających wspólny bok lub wspólny wierzchołek są względnie pierwsze. Wykaż, że pewna liczba występuje na szachownicy co najmniej 17 razy.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt D jest środkiem boku AC. Wykaż, że jeżeli kąt AID jest prosty, to $AC+BC = 3AB$.

5. Ciągi $x_1, x_2, \ldots$ oraz $y_1, y_2, \ldots$ są określone przez warunki
$$x_1 = \frac{1}{8} \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$y_1 = \frac{1}{10} \quad \text{oraz} \quad y_{n+1} = y_n + y_n^2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots.$$
Wykaż, że dla każdej pary (k, l) liczb całkowitych dodatnich wyrazy x_k i y_l są różne.

6. W prostokącie o bokach długości a, b poprowadzono skończoną liczbę odcinków równoległych do jego boków. Odcinki mogą się przecinać, żaden nie zawiera się w boku prostokąta, a suma ich długości jest równa d. Udowodnij, że wśród części, na które odcinki dzielą prostokąt, istnieje taka, której pole jest nie mniejsze niż
$$\left(\frac{2ab}{a+b+d}\right)^2.$$