Koło matematyczne.

zestaw 9/2016/2017

1. Liczby $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ należą do zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Udowdonij, że wśród nich są takie dwie, że jedna jest dzielnikiem drugiej.

2. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu R oraz jest opisany na okręgu o środku I i promieniu r. Udowodnij, że
$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

3. Dana jest szachownica 8×8, której pola pokolorowane są w tradycyjny sposób. W jednym ruchu zmieniamy kolory pól w wybranym wierszu lub kolumnie: czarne pola przekolorowujemy na białe, a białe na czarne. Rozstrzygnij, czy po pewnej liczbie ruchów możemy otrzymać szachownicę, w której dokładnie jedno pole jest czarne.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC = CA$ Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach P i Q, różnych od punktu D. Proste DP i DQ przecinają prostą AB odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że $AE = BF$.

5. Dana jest 15-cyfrowa liczba naturalna podzielna przez 81, niepodzielna przez 10 i której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek. Wykazać, że usuwając jedno zero z zapisu dziesiętnego tej liczby, otrzymujemy liczbę 14-cyfrową, która nie jest podzielna przez 81.

6. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3 i niech $n = (4^p - 1)/3$. Wykaż, że liczba $2^{n-1} - 1$ jest podzielna przez n.