Koło matematyczne.
zestaw 10/2015

1. Okrąg wpisany w trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Dowieść, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz środki odcinków BC i AD są współliniowe.

2. Punkt O leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowieść, że jeśli pola trójkąta ABO, BCO, CDO i DAO są równe, to punkt O leży na jednej z przekątnych AC lub BD czworokąta $ABCD$.

3. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$ oraz liczba rzeczywista dodatnia a. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$, gdzie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są nieujemne oraz ich suma równa się a.

4. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że licznik ułamka
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$
jest podzielny przez p^2.

5. Na okrągłym torze znajduje się n identycznych samochodów. Łączna ilość paliwa w bakach wszystkich samochodów wystarczy na przejechanie przez jeden samochód jednego okrążenia. Udowodnij, że pewien z tych samochodów może przejechać pełne okrążenie, jeśli po drodze będzie zabierał paliwo pozostałym.

6. Dwaj gracze grają w następującą grę: startują od liczby 2. Ruch polega na zwiększeniu aktualnej liczby dodając do niej jej właściwy dzielnik. Wygra ten, kto jako pierwszy napisze liczbę większą od 2015. Który z graczy ma strategię wygrywającą?