

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
(10 czerwca 2013 r.)

1. Wykaż, że dla każdej pary (a, b) dodatnich liczb rzeczywistych spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b}} + \frac{1}{\sqrt{a + b^2}} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

2. Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych, większych od sześciu milionów, których iloczyn cyfr jest równy 42. Odpowiedz uzasadnij.
3. Danych jest trzynaście takich liczb naturalnych, że suma każdych czterech spośród nich jest podzielna przez 7. Wykaż, że suma wszystkich tych liczb jest podzielna przez 7.
4. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i CA trójkąta ABC . Odcinki AK i BL są prostopadłe i przecinają się w punkcie S . Wyznacz wartość ilorazu $CS : AB$.
5. Podaj dwie pary (k, n) dodatnich liczb całkowitych, dla których
- $$2k^3 = n^4.$$
6. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny a podstawach ABC , $A'B'C'$ oraz krawędziach bocznych AA' , BB' , CC' . Punkt M jest środkiem krawędzi AA' . Wiedząc, że
- $$\sphericalangle BMC' = 90^\circ,$$
- oblicz stosunek długości krawędzi bocznej do długości krawędzi podstawy danego graniastosłupa.