

**Koło matematyczne.**

30 września 2013

1. Wielokąt wypukły ma tę własność, że nie zawiera żadnego trójkąta o polu 1. Udowodnij, że ten wielokąt jest zawarty w pewnym trójkącie o polu 4.
2. Dane są liczby nieujemne  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  o sumie równej 1. Wyznaczyc maksymalną wartość wyrażenia

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6 + a_5a_6a_1 + a_6a_1a_2.$$

3. Udowodnić, że liczba  $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$  jest złożona.
4. Punkt  $H$  jest ortocentrum nieprostokątnego trójkąta  $ABC$ . Prosta  $l$  przechodząca przez  $H$  przecina proste  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w punktach  $D \neq B$  i  $E \neq C$ . Niech  $P$  będzie dowolnym punktem takim, że  $AP \perp l$ . Udowodnić, że  $[PBD] : [PCE] = DH : HE$ , gdzie  $[XYZ]$  oznacza pole trójkąta  $XYZ$ .
5. Udowodnij, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to z dowolnego zbioru  $2p - 1$  liczb całkowitych można wybrać  $p$  takich, których suma jest podzielna przez  $p$ .
6. Prostokąt podzielono na prostokąty o bokach równoległych do boków wyjściowego prostokąta. Każdy z prostokątów podziału ma co najmniej jeden bok o długości naturalnej. Udowodnij, że wyjściowy prostokąt ma co najmniej jeden bok długości naturalnej.

Powodzenia!