Koło matematyczne.

13 stycznia 2014

1. Trójkąt ABC jest równoramienny ($AB = AC$). Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech D będzie takim punktem, że DA i DC są styczne do o odpowiednio w punktach A i C. Udowodnić, że $\measuredangle DBC \leq 30°$.

2. Dane są liczby dodatnie p, q, r, s. Pokazać, że z odcinków o długości
$$\sqrt{p^2+q^2}, \quad \sqrt{q^2+r^2+s^2+2qr}, \quad \sqrt{p^2+r^2+s^2+2ps}$$
da się zbudować trójkąt i jego pole wynosi $(pq + pr + qs)/2$.

3. Niech liczby rzeczywiste nieujemne a, b, x, y spełniają nierównści
$$a^5 + b^5 \leq 1, \quad x^5 + y^5 \leq 1.$$
Dowieść, że
$$a^2x^3 + b^2y^3 \leq 1.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne x, y, z spełniające równanie
$$3^x + 4^y = 5^z.$$

5. Każdy punkt w przestrzeni jest pokolorowany albo na niebiesko albo na czerwono. Dowieść, że istnieje przynajmniej jeden kwadrat o boku długości 1, z liczbą wierzchołków niebieskich równą 0, 1 lub 4.

6. Rozstrzygnąć czy istnieje 2014 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 88333\}$, że żadne trzy z nich nie są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Powodzenia!