Koło matematyczne.
20 stycznia 2014

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ spełniające równanie
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599.$$

2. Wyznaczyć warunek konieczny i wystarczający jaki muszą spełniać stałe liczby rzeczywiste $r_1, r_2, \ldots, r_n$, aby nierówność
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n)^2$$
zachodziła dla wszystkich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Dane jest koło k o środku O i promieniu r. Niech AB będzie ustaloną średnicą koła k, a K - ustalonym punktem odcinka AO. Przez t oznaczmy styczną do k w punkcie A. Dla każdej cięciwy CD (różnej od AB), przechodzącej przez K, określamy P i Q jako punkty przecięcia prostych BC i BD ze styczną t. Dowieść, że iloczyn długości AP i AQ ma dla każdej cięciwy CD tę samą wartość.

4. Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC ($AB \neq AC$). Na bokach AB i AC budujemy trójkąty podobne ABD i ACE leżące na zewnątrz trójkąta ABC oraz tak aby $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE$ oraz $\measuredangle BAD = \measuredangle CAE$. Proste CD i BE przecinają odpowiednio proste AB i AC w punktach P i Q. Udowodnić, że $AP = AQ$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$[ABD] \cdot [ACE] = [ABC]^2,$$
gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

5. Wyznacz największą stałą liczbę rzeczywistą k taką, aby nierówność
$$\frac{kabc}{a+b+c} \leq (a+b)^2 + (a+b+4c)^2$$
zachodziła dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c.

6. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania układu równań:
$$x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 4u^2 = 1981, \quad x + y + z + u = 54.$$

Powodzenia!