Koło matematyczne.
3 marca 2014

1. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek
$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2.$$
Dowieść, że
$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4.$$

2. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich zachodzi nierówność
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

3. Na obwodzie koła wybrano n punktów i każde dwa z nich połączono cięciwą. Żadne trzy cięciwy nie przecięły się w jednym punkcie. Na ile obszarów zostało podzielone koło?

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są równości $\angle BAC = 44°$, $\angle BCA = 17°$, $\angle CAD = \angle ACD = 29°$. Wyznaczyć miarę kąta ABD.

5. Dany jest zbiór S punktów na płaszczyźnie o następującej własności: Dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 100$ istnieje prosta, która zawiera dokładnie k spośród danych punktów. Wykazać, że zbiór S składa się z co najmniej 2550 punktów.

6. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Udowodnić, że dla danych liczb dodatnich a i b istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniająca równanie funkcyjne
$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

Powodzenia!