Koło matematyczne.
10 marca 2014

1. Niech $a \leq b < c$ będą bokami trójkąta prostokątnego, $2p$ jego obwodem, zaś S - polem. Udowodnić, że $p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$.

2. Niech D, E, F będą punktami leżącymi odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC oraz niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że
$$\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)(DE + EF + FD) \geq \frac{AB + BC + CA}{R}.$$

3. Niech A, B, C i D będą czterema różnymi punktami leżącymi, w takim porządku, na lini prostej. Okręgi o średnicach AC oraz BD przecinają się w punktach X i Y. Proste XY i BC przecinają się w punkcie Z. Niech P będzie punktem prostej XY, różnym od Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M; prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY przecinają się w jednym punkcie.

4. Wyznaczyć wszystkie ciągi $p_1, p_2, \ldots, p_{100}$ liczb pierwszych, dla których spełnione są podzielności
$$p_1 | p_2^2 - 1, p_2 | p_3^2 - 1, \ldots, p_{100} | p_1^2 - 1.$$

5. Danych jest $n \geq 3$ punktów na płaszczyźnie, nie leżących na jednej prostej. Każdemu z tych punktów przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą. Wiadomo, że dla każdej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa dane punkty suma liczb przyporządkowanych punktom leżącym na tej prostej wynosi 0. Wykazaż, że każdemu punktowi przyporządkowano liczbę 0.

6. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Symetralne odcinków AD i BD przecinają boki AC i BC odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że punkty E, C, F, O leżą na jednym okręgu, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Powodzenia!