Koło matematyczne.
31 marca 2014

1. Dany jest wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ przy czym $b < 0$ oraz $ab = 9c$. Pokazać, że f ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą $2n$ liczbami rzeczywistymi, przy czym liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne między sobą. Przypuśćmy, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(a_i + b_1)(a_i + b_2) \ldots (a_i + b_n) = 1$. Dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obliczyć $(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \ldots (a_n + b_j)$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 1, przy czym przekątna AC jest średnicą tego okręgu, a druga przekątna BD jest równa AB. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych. Obliczyć CD wiedząc, że $PC = 2/5$.

4. Udowodnić, że iloczyn 99 liczb postaci $\frac{k^3-1}{k^3+1}$ $(k = 2, 3, \ldots, 100)$ jest większy od $2/3$.

5. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b o następującej własności: Dla każdej liczby całkowitej dodatniej k, liczby $ak + 2$ oraz $bk + 3$ nie są względnie pierwsze. Udowodnić, że $3a = 2b$.

6. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego. Wykazać, że

$$\measuredangle BAD = \measuredangle CAD, \quad \measuredangle ABD = \measuredangle CBD, \quad \measuredangle BCD = \measuredangle ACD.$$

Powodzenia!