Koło matematyczne.
14 kwietnia 2014

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:
$$(2n^2+3n+1)^n \geq 6^n(n!)^2.$$

2. W trójkącie ABC odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P i są równej długości (punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB). Udowodnić, że
$$PA+PB+PC = 2(PD+PE+PF).$$

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$ oraz $\angle EAB = \angle ABC = \angle CDE$. Wykazać, że w pięciokąt $ABCDE$ można wpisać okrąg.

4. Ciągi $x_1, x_2, \ldots$ oraz $y_1, y_2, \ldots$ są określone przez warunki
$$x_1 = \frac{1}{8} \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$y_1 = \frac{1}{10} \quad \text{oraz} \quad y_{n+1} = y_n + y_n^2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots.$$
Wykazać, że dla każdej pary (k, l) liczb całkowitych dodatnich wyrazy x_k i y_l są różne.

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABD i BCD odpowiednio w punktach K i L, zaś sfera dopisana do czworościanu $ABCD$, styczna do ściany ABC, jest styczna do płaszczyzn ABD i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić,że trójkąty KBP i LBQ są przystające.

6. Danych jest n mężczyzn i n kobiet. Chcemy utworzyć n par małżeńskich. Możemy połączyć tylko takiego mężczyznę i taką kobietę, którzy się sobie podobają. Zakładamy, że relacja podobania się sobie jest symetryczna, ale nie każdy musi podobać się każdemu. Warunkiem koniecznym na to aby udało się to zrobić jest:
Dla każdego $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dla dowolnych k mężczyzn, liczba kobiet, które im się w sumie podobają jest równa co najmniej k.
Udowodnić, że jest to także warunek wystarczający.

Powodzenia!