Koło matematyczne.

26 maja 2014

1. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg S. Zakładamy, że punkty A i B są ustalone, a C i D mogą się poruszać po okręgu tak, by jednak długość odcinka CD była stała. Punkty X i Y są położone na półprostych AC i BC tak, że $AX = AD$ i $BY = BD$. Udowodnić, że długość odcinka XY jest stała.

2. Udowodić, że dla $n \geq 1$ liczba $2^{3^n} + 1$ dzieli się przez 9.

3. Udowodnić, że równanie
$$(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = c,$$
gdzie a i c są pewnymi liczbami rzeczywistymi oraz $c \geq 0$ ma rozwiązanie rzeczywiste.

4. Okrąg o środku w punkcie O jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do boku AC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AC. Udowodnić, że prosta MO przechodzi przez środek odcinka BD.

5. Udowodnić, że jeśli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że
$$x + y + z = 1,$$
to
$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}.$$

6. Sfera w pisana w czworościan jest styczna do jednej ściany w środku okręgu wpisanego, do drugiej w środku ciężkości, a do trzeciej w ortocentrum. Udowodnić, że czworościan ten jest foremny.