Kółko matematyczne w XIV LO w Warszawie

Zadania na dzień 21.10.2013

1. Każdy wierzchołek pewnego wielokąta wypukłego ma obie współrzędne całkowite. Ponadto każdy bok ma długość będącą dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że obwód tego wielokąta jest liczbą parzystą.

2. Punkt H jest ortocentrum nieprostokątnego trójkąta ABC. Prosta l przechodząca przez H przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach $D \neq B$ i $E \neq C$. Niech P będzie dowolnym punktem takim, że $AP \perp l$. Udowodnić, że $[PBD]:[PCE] = DH:HE$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

3. Dane są liczby całkowite dodatnie $k < n$. Załóżmy, że każda z liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest względnie pierwsza z n. Utwórzmy wszelkie możliwe sumy tych liczb (bez powtórzeń). Wykazać, że otrzymane sumy dają co najmniej k różnych, niezerowych reszt przy dzieleniu przez n.

4. Wykazać, że istnieje liczba postaci 5^n, której zapis dziesiętny zawiera co najmniej 2013 kolejnych zer.

5. Prostokąt podzielono na prostokąty o bokach równoległych do boków wyjściowego prostokąta. Każdy z prostokątów podziału ma co najmniej jeden bok o długości naturalnej. Udowodnij, że wyjściowy prostokąt ma co najmniej jeden bok długości naturalnej.