Prosimy wypełnić poniższe pola DRUKOWANYMI literami:

Imię i nazwisko

E-mail

Nr telefonu

+	4	8									

Klasa

Klucz do testu kwalifikacyjnego na Warsztaty Matematyczne 2022

Klasy pierwsze i drugie

Test składa się z uporządkowanych w kolejności **losowej** 30 zestawów po 3 pytania. Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić. Test trwa 180 minut.

Zasady punktacji

- Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
- Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
- Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
- Za zadanie zrobione w całości dobrze dodatkowe **2** punkty.
- Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
- Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** pkt.

Powodzenia!

Uwaga! Przez zbiór liczb naturalnych w zadaniach rozumiemy zbiór liczb całkowitych większych lub równych 0.

1. Dana jest kwadratowa kartka $ABCD$, niech E, F, G, H będą środkami odcinków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Zginamy kartkę wzdłuż prostej FH, tak aby punkt A przeszedł na punkt D, następnie wzdłuż prostej EG tak aby punkt D przeszedł na punkt C, następnie wzdłuż prostej FG, tak aby środek $ABCD$ przeszedł na punkt C. Tak złożoną kartkę tniemy równolegle do CD przechodząc przez środek CF.

N Czy dostaniemy 4 kawałki papieru?

T Czy dokładnie 2 kawałki papieru będą prostokątami?

N Czy dokładnie 4 kawałki papieru będą trójkątami?

2*. Dany jest trójkąt ABC o bokach: $|AB| = 13, |BC| = 12, |AC| = 5$. D - spodek wysokości z C, niech E będzie punktem przecięcia kwadratu $ABFG$ (zawierającego w sobie punkt C) z półprostą DC.
Jaki jest stosunek $\frac{[ACEG]}{[CBFE]}$?

T $\frac{25}{144}$

N $\frac{5}{12}$

N $\frac{12}{5}$

3*. Martyna i Oliwia grają w grę. Zaczyna Martyna, na początku mając na tablicy liczbę 2. Dziewczyny wykonują ruchy na przemian, w każdym ruchu muszą dodać jakiś dzielnik właściwy aktualnej liczby do zapisanej liczby. Wygrywa ta z dziewczyn, która napisze liczbę większą lub równą x.
Dzielniki właściwe liczby 10 to: $1, 2, 5$.
Czy Martyna ma strategię wygrywającą dla x równego:

N 4?

T 9?

T 1237?

4. Czy

- N $\mathrm{nwd}(8649, 8789) > 100$
- T $\mathrm{nwd}(8917, 7471) > 100$
- T $\mathrm{nwd}(7164, 8358) > 100$

5. Ile cyfr ma najmniejsza liczba, która kończy się na 6 i jeśli się jej ostatnią cyfrę (6) przeniesie na początek, to otrzymana liczba jest 4 razy większa od liczby początkowej?

- T 6
- N 8
- N 10

6. Liczba 139:

- T Jest pierwsza.
- N Może być przedstawiona jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych.
- N Może być przedstawiona jako suma dwóch sześcianów liczb całkowitych.

7. Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1 i prostokątny o przyprostokątnej 1.

- N trójkąt równoboczny ma większy promień okręgu wpisanego.
- N trójkąt równoboczny ma większy promień okręgu opisanego
- N istnieje dokładnie jeden wielościan, którego wszystkie ściany to trójkąty równoboczne.

8. Na boku BC trójkąta ABC, spełniającego kąt $ACB = 170°$, obrano taki punkt D, że $BD = AC$. Niech P i M będą odpowiednio środkami odcinków CD i AB. Miara kąta BPM wynosi:

- T $85°$
- N $90°$
- N $95°$

9. Mamy dany ciąg liczb naturalnych od 1 do 16.

- T Możemy podzielić te liczby w pary, tak aby suma każdej z nich była kwadratem liczby całkowitej.
- T Możemy ustawić je w szeregu, tak aby suma każdych dwóch kolejnych była kwadratem liczby całkowitej.
- N Możemy ustawić je w kole, tak aby suma każdych dwóch kolejnych była kwadratem liczby całkowitej.

10*. Oceń prawdziwość podanych relacji:

- $\boxed{\text{N}}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} = \frac{7}{13}$.
- $\boxed{\text{N}}$ Dla dowolnego n: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} < 1000$.
- $\boxed{\text{T}}$ Dla dowolnego n: $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1+i^2+i^4} < \frac{1}{2}$

11. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, x, że:

$$x \mid a + 5b$$

$$x \mid 3a + b$$

Czy z tych warunków wynika, że:

- $\boxed{\text{T}}$ $x \mid 29a^2 + 38ab + 53b^2$
- $\boxed{\text{T}}$ $x \mid 7a^2 + 21b^2$
- $\boxed{\text{N}}$ $x \mid -8a^2 + 4ab + 22b^2$

12*. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na pewien z k różnych kolorów (każdy kolor został użyty). Prawdą jest, że;

- T jeśli $k = 3$ to zawsze istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o 1.
- T jeśli $k = 4$ to zawsze istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o 1 lub $\sqrt{3}$.
- N jeśli $k = 4$ to istnieje takie kolorowanie, że każda prosta jest jednokolorową lub dwukolorowa.

13. Dany jest turniej - każdy zawodnik rozgrywa dokładnie jeden mecz z każdym innym i nie ma remisów. Mistrzem turnieju nazwiemy zawodnika, który dla każdego zawodnika A, wygrał z nim lub kimś kto wygrał z A. Czy:

- N w turnieju może być dokładnie 2 mistrzów.
- T w turnieju może być dokładnie 3 mistrzów.
- N w czteroosobowym turnieju może zdarzyć się, że każdy jest mistrzem.

14. Niech $d_1, d_2, \ldots, d_m$ oznaczają wszystkie dodatnie dzielniki n oraz niech $\sigma(n) = d_1 + d_2 + \ldots + d_m$. Czy:

- T $\frac{\sigma(n)}{(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_m})} = n$
- N $\sigma(2^k \cdot n) = (2^{k+1} - 1) \cdot \sigma(n)$
- N istnieją dokładnie 2 takie liczby parzyste n, że $\sigma(n) = 2n$ oraz $n < 1000$

15*. Na pewnej wyspie żyją dwa typy mieszkańców: prawdomówni - którzy zawsze mówią prawdę i kłamcy, którzy zawsze kłamią. Po przybyciu na wyspę podróżnik spotkał dwóch mieszkańców: wysokiego i niskiego. Zapytał wysokiego, czy obaj są prawdomówni, ale z jego wypowiedzi nie można było wywnioskować, kim oni byli. Wówczas zapytał niskiego, czy wysoki jest prawdomówny, a gdy ten odpowiedział, podróżnik wiedział, do jakiego typu należał każdy z nich. Czy napotkani mieszkańcy mogli być:

N obaj prawdomówni

N obaj kłamcami

T niski prawdomówny, zaś wysoki kłamcą

16. W tym zadaniu d oznacza długość średnicy podstawy stożka, zaś l - długość jego tworzącej. Czy można zbudować stożek, gdy:

T $d = 6,\ l = 5$

N $d = 12,\ l = 5$

T $d = 22,\ l = 12$

17*. Niech $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (2,0)$, $D = (3,0)$, $E = (0,1)$. Czy

T $\measuredangle BED = \measuredangle ECA$?

T $\measuredangle BEC = \measuredangle EDA$?

T $\measuredangle AEB = \measuredangle EBA$?

18. Czy liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez:

- $\boxed{\text{N}}$ 5?
- $\boxed{\text{N}}$ 11?
- $\boxed{\text{T}}$ 13?

19. Pewien pijak spacerując po nadmorskich klifach znalazł się trzy kroki od przepaści (trzeci już wpada w przepaść). Jest on pijany, dlatego wykonuje losowe ruchy przybliżając się o krok do przepaści z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$ oraz oddalając się o krok od przepaści z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$. Zakładamy, że pijak może odejść od przepaści dowolnie daleko oraz nie kończy spaceru za wyjątkiem upadku w przepaść.

- $\boxed{\text{N}}$ Prawdopodobieństo pozostania żywym po pięciu krokach wynosi więcej niż 0.9.
- $\boxed{\text{N}}$ Pijak może spaść w 24 kroku.
- $\boxed{\text{N}}$ Po nieskończenie długim czasie szansa na przeżycie pijaka wynosi $\frac{4}{5}$.

20. Codziennie zaraz po wyjściu ze szkoły Jaś idzie na stację metra i wsiada w pierwszy pociąg, który nadjedzie, niezależnie od kierunki jazdy. Na Kabatach mieszka babcia Jasia, a niedaleko Młocin jego dziewczyna. Jaś zawsze korzysta z okazji i odwiedza osobę, w pobliżu której się znalazł. Zakładamy, że pociągi metra kursują w stałych odstępach czasu, z równą częstotliwością w każdym z dwóch kierunków.

- $\boxed{\text{N}}$ Jaś zawsze z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ pojedzie do babci.
- $\boxed{\text{T}}$ Czy może się zdarzyć, że Jaś bez celowego działania będzie jeździł do dziewczyny 5 razy częściej, niż do babci?
- $\boxed{\text{T}}$ Czy możliwe jest, że gdyby Jaś zmienił strategię i przepuszczał zawsze pierwszy napotkany pociąg metra i wsiadał do drugiego to zmieniłby częstotliwość widzenia babci?

21. Dane są dwie liczby niewymierne.
Czy możliwe jest, aby:

- $\boxed{\text{T}}$ Ich suma była liczbą wymierną
- $\boxed{\text{T}}$ Zarówno ich iloczyn, jak i iloraz były wymierne
- $\boxed{\text{T}}$ Występowało między nimi nieskończenie wiele liczb wymiernych

22. Które z poniższych planszy można pokryć klockami 6×1?

- $\boxed{\text{N}}$ 16×15
- $\boxed{\text{N}}$ 19×19 bez środkowego pola
- $\boxed{\text{T}}$ 13×13 bez środkowego pola

23. Zdanie ”Dla dowolnych n kolejnych liczb naturalnych, można wybrać dwie z nich (niekoniecznie różne), tak że ich iloczyn daje resztę 1 w dzieleniu przez m” jest prawdziwe dla:

T $m = 8$, $n = 2$

N $m = 13$, $n = 5$

T $m = 17$, $n = 8$

24. Dane są: $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$, takie, że: $a \neq c$, $b \neq d$,
Spełniony jest warunek: $f(17) + f(105) = g(17) + g(105)$.
Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = g(x)$?

N 0

T 1

N 2

25. W kwadracie $ABCD$ wybrano 2 losowe punkty na boku CD: M, N. Trójkąty ABM, ABN na pewno:

N są podobne.

N mają równe obwody.

T mają równe pola.

26. Mając pierścień z dwóch okręgów o wspólnym środku, cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego ma długość k. Pole między okręgami wyraża się przez:

N πk^2

T $\frac{\pi k^2}{4}$

N $\frac{\pi k}{4}$

27*. Liczba $\sqrt{12+2\sqrt{27}}-\sqrt{19-4\sqrt{12}}$ jest:

N ujemna.

N całkowita.

T niewymierna.

28. Liczba $a^3b^5c^2$ jest siódmą potęgą pewnej liczby całkowitej, gdzie a, b i c są liczbami całkowitymi. Czy z tego wynika, że siódmą potęgą jest również liczba:

T ab^4c^3?

N a^2bc?

T $a^{22}b^{333}c^{55555}$?

29. Mamy daną liczbę naturalną k. Ile uporządkowanych rozwiązań (m, n) może mieć równanie $2^m + 2^n = k$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi.

T 0

T 1

T 2

30. Czy istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych wśród których:

N Dokładnie 12 jest liczbami Fibbonacciego?

T Dokładnie 7 jest liczbami pierwszymi?

T Dokładnie 7 jest potęgami dwójki o całkowitym wykładniku?