Prosimy wypełnić poniższe pola DRUKOWANYMI literami:

Imię i nazwisko

E-mail

Nr telefonu

+	4	8									

Klasa

Klucz do testu kwalifikacyjnego na Warsztaty Matematyczne 2022

Klasy trzecie i czwarte

Test składa się z uporządkowanych w kolejności **losowej** 30 zestawów po 3 pytania. Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji

- Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
- Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
- Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
- Za zadanie zrobione w całości dobrze dodatkowe **2** punkty.
- Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
- Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

Uwaga! Przez zbiór liczb naturalnych w zadaniach rozumiemy zbiór liczb całkowitych większych od 0.

1. Czy istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych wśród których:

N Dokładnie 12 jest liczbami Fibbonacciego?

T Dokładnie 7 jest liczbami pierwszymi?

T Dokładnie 7 jest potęgami dwójki o całkowitym wykładniku?

2*. Wielomian $W(x)$ ma współczynniki rzeczywiste oraz $W(8) = 8$, $W(-4) = -8$. Wiadomo, że istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $W(x) = x \cdot P(x^2)$.

T Na pewno $W(0) = 0$.

T Na pewno $W(8) + W(-8) = 0$.

N Na pewno $W(2) = 0$.

3*. Niech $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (2,0)$, $D = (3,0)$, $E = (0,1)$. Czy

T $\measuredangle BED = \measuredangle ECA$?

T $\measuredangle BEC = \measuredangle EDA$?

T $\measuredangle AEB = \measuredangle EBA$?

4. Rozpatrzmy ciąg a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $\ldots$

T Dla $a = 720$, $b = 7$ są w nim co najmniej 4 liczby pierwsze.

N Dla $a = 39$, $b = 57$ jest w nim liczba pierwsza.

T Dla $a = 8953$, $b = 22$ jest w nim co najmniej 5 liczb pierwszych.

5. Niech $d(n)$ oznacza sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej n i $D(n) = d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$.

T $d(840) \leqslant 8400$.

N $d(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)) = d(1) \cdot d(3) \cdot \ldots \cdot d(2n+1)$.

N $D(32) \geqslant 1024$.

6. W klasie w matexie są 23 osoby, w tym 2 dziewczyny, 10 uczestników OM i 20 graczy brydża (grupy są niezależne od siebie). Najbardziej prawdopodobne jest, że...

N dwójka najlepszych graczy w brydża w klasie jest dziewczynami.

N obie dziewczyny startują w OM i wszyscy uczestnicy OM w tej klasie grają w brydża.

T pewne dwie osoby obchodzą urodziny tego samego dnia (przyjmij że rok ma 365 dni, lata przestępne nie istnieją i każdy dzień w roku ma równe prawdopodobieństwo bycia dniem urodzin).

7*. Niech $e_1 = 2$ i dla $n > 0$ zachodzi $e_{n+1} = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n + 1$.

T Dla $a \neq b : NWD(e_a, e_b) = 1$.

N Ostatnią cyfrą e_{2022} jest 1.

N e_{100} ma więcej niż 2^{100} cyfr.

8. Wielomian $P(x) = 3x^5 + x^4 + 7x^3 - 2x - 1$ posiada pierwiastek:

N całkowity.

N wymierny.

T rzeczywisty.

9. Liczba 1000000000601 jest:

N kwadratem liczby całkowitej.

N sześcianem liczby całkowitej.

N liczbą pierwszą.

10*. Równanie $x^2 + 11y^2 = kz^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dla:

T $k = 5$.

N $k = 6$.

T nieskończenie wielu całkowitych k.

11. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\measuredangle EFA = \measuredangle FAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 120°$ i $\measuredangle CFE = \measuredangle FCD$.

N $ABCDEF$ jest foremny.

T $AF = BC$.

T Na $ABCF$ można opisać okrąg.

12. Martyna i Oliwia grają w grę. Ruch polega na zamianie liczby całkowitej n na dowolną liczbę całkowitą z przedziału $[\frac{n}{4}, \frac{n}{2}]$. Przegrywa ta, która nie może wykonać ruchu. Martyna zaczyna.

T Dla $n = 100$ Martyna ma strategię wygrywającą.

N Wśród liczb $[1, 1000]$ jest dokładnie 620 dających strategię wygrywającą dla Martyny.

N Dla $n = 10^6$ Martyna nie ma strategii wygrywającej.

13. Mamy dany trójkąt równoboczny ABC o polu 7. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach AB i AC, że $AN = BM$. Punkt O jest przecięciem BN i CM, a pole BOC jest równe 2.

T Kąt BOC jest równy $120°$.

T Stosunek $\frac{MB}{AB}$ może być równy $\frac{1}{3}$.

N Kąt AOB jest równy $150°$.

14. Rozważmy ciąg rekurencyjny o wzorze $a_{n+3} = a_{n+2} \cdot a_{n+1} + a_n$ oraz $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

N Istnieje taki indeks m, że $a_m = 1000$.

T Istnieje nieskończenie wiele liczb w tym ciągu podzielnych przez 3.

T Dla każdej liczby całkowitej n istnieje w tym ciągu liczba będąca wielokrotnością n.

15*. Mamy stosy kamieni. Dwóch graczy na przemian zabiera dowolną liczbę kamieni z najliczniejszego stosu. Wygrywa ten gracz, po którego ruchu stół zostanie pusty. Czy w podanych układach stosów gracz pierwszy może zawsze wygrać, niezależnie od ruchów przeciwnika?

N $7, 7, 3, 2, 2, 1$

T $6, 6, 6, 6, 6$

T $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$

16. Dane są trzy okręgi o środkach O_1, O_2, O_3 i promieniach odpowiednio 3, 4 i 21, takie że każde dwa z nich są zewnętrznie styczne. W trójkąt $O_1O_2O_3$ wpisano okrag ω o środku O.

T Promień ω wynosi 3.

N Długość odcinka OO_2 jest mniejsza niż $\frac{9}{2}$.

T Pole trójkąta $O_1O_2O_3$ jest większe od 81.

17. Pokolorujmy wszystkie liczby całkowite dodatnie na 2 kolory. Czy:

T zawsze istnieje jednokolorowy niestały ciąg arytmetyczny długości 3?

T istnieje takie kolorowanie, że suma dwóch dowolnych różnych jednokolorowych liczb nie jest potęgą dwójki?

T zawsze istnieją takie parami różne jednokolorowe liczby x, y, z że $x + y = z$?

18. Dany jest turniej - każdy zawodnik rozgrywa dokładnie jeden mecz z każdym innym i nie ma remisów. Cyklem k-elementowym nazwiemy taki ciąg parami różnych zawodników, że pierwszy wygrywa z drugim, drugi z trzecim itd., aż na końcu k-ty wygrywa z pierwszym. Zawsze prawdą jest, że:

T jeśli każdy zawodnik zwyciężył z k innymi to istnieje cykl co najmniej $(k+2)$-elementowy.

T jeśli każdy zawodnik z kimś wygrał i nikt nie wygrał z każdym to zawsze istnieje cykl.

T jeśli w turnieju złożonym z $n \geqslant 3$ zawodników istnieje cykl n-elementowy to istnieje także 3-elementowy.

19. Które z następujących zdań są równoważne zdaniu: "Jeżeli p jest prawdziwe, wtedy q jest fałszywe"?

N Jeżeli q jest fałszywe, to p jest prawdziwe.

T Jeżeli q jest prawdziwe, to p jest fałszywe.

T Albo oba p i q są fałszywe, albo dokładnie jedno z nich jest fałszywe.

20. Konstruujemy ciąg a_n, w którym $0 \leqslant a_1, a_2 < 5$ oraz dla $n \geqslant 1$ $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n \pmod{10}$. Czy w takim ciągu może wystąpić cyfra:

N 5?

T 7?

T 9?

21. Zdefiniujmy ciąg cyfr w taki sposób, że na n-tym miejscu ciągu znajduje się pierwsza cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby 2^n. Czyli początek ciągu to $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \ldots$ Ciąg ten składa się z 9 różnych cyfr. Będziemy rozważać częstotliwość występowania każdej z nich (czyli stosunek wystąpień danej cyfry do określonego miejsca w ciągu do łącznej liczby cyfr do tego miejsca)

N Dla dostatecznie długiego ciągu wszystkie cyfry będą występować równie często.

T Cyfra 2 będzie występować częściej niż cyfra 3.

T Cyfra 1 będzie występować ponad dwukrotnie częściej niż cyfra 9.

22. Czy liczba, której przedstawienie w systemie binarnym to 1011000011 jest:

N podzielna przez 3?

N dzielnikiem 10110000111 (system binarny)?

T w systemie czwórkowym postaci 23003?

23. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełnia dla każdej liczby rzeczywistej $f(x) = f(f(x)) + x$, to:

T f jest różnowartościowa

N istnieje $x > 0$, taki że $f(f(x)) = x$

T $f^{42}(1) = 1$, przy czym $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, $f^1(x) = f(x)$

24. Ciąg Fibonacciego to taki ciąg, że $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla n całkowitych nieujemnych. Niech $f(n)$ będzie najmniejszą taką liczbę naturalną, że n dzieli $F_{f(n)}$ oraz $F_{f(n)+1} - 1$, lub równe 0 jeśli nie ma takiej liczby. Wówczas:

N $f(5) = 10$

N $f(66) < f(88)$

N istnieje nieskończenie wiele takich n, że $f(n) = 0$

25*. Jaś napotkał tablicę z liczbami naturalnymi od 1 do 20 i postanowił zagrać w grę. W każdym ruchu ściera dwie liczby z tablicy i rysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych tych długości, po czym dopisuje do liczb na tablicy długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Które z tych nierówności może spełniać otrzymana na końcu liczba?

N $1 \leqslant x$

N $x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

T $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x$

26. Na tablicy napisanych jest 97 liczb postaci $\frac{49}{k}$ dla $1 \leqslant k \leqslant 97$. W każdym ruchu pewne dwie liczby a i b zosają zmazane i zastąpione przez liczbę $2ab - a - b + 1$. Jaka liczba może pozostać na tablicy po 96 krokach?

N $\frac{1}{2}$

T 1

N 2

27. Pod domem Ani zatrzymują się autobusy linii 1 i 2, pierwszy kursuje co 10 minut zaczynając od 10:05 i jeździ do sklepu z rogalikami o nadzieniu truskawkowym, a drugi co 20 minut od 12:00 i jeździ do sklepu z rogalikami o nadzieniu śliwkowym. Ania codziennie wychodzi na przystanek o losowej porze między 15:00 i 16:00, a następnie wsiada w pierwszy autobus który przyjedzie.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania będzie czekała nie dłużej niż 5 minut oraz pojedzie do sklepu z rogalikami o nadzieniu truskawkowym?

N $\frac{1}{4}$

T $\frac{1}{2}$

N $\frac{3}{4}$

28. O jaki kąt zgodnie ze wskazówkami zegara nalezy obrócić parabolę o równaniu $y = x^2$, żeby miała miejsce zerowe dla $x = 2\sqrt{3}$.

T $60°$

N $45°$

N $30°$

29. Ile liczb całkowitych z przedziału $[1, 2022]$ można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

T więcej niż 1011

N więcej niż 1516

N więcej niż 2000

30*. Liczba $\sqrt{13+2\sqrt{12}}-\sqrt{3(7+\sqrt{48})}$ jest:

- $\boxed{\text{T}}$ ujemna.
- $\boxed{\text{T}}$ całkowita.
- $\boxed{\text{N}}$ niewymierna.