

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
8 czerwca 2021 r.

Uwagi:

- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
- Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru.
- Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
- Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegać będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.

1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c takie, że

$$a + b + c = 1 \quad \text{oraz} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Udowodnij, że $a \cdot b \cdot c \leq 0$.

2. Cięciwa CD pewnego okręgu przecina średnicę AB pod kątem 45° i dzieli tę średnicę na dwa odcinki długościach 6 i 4. Oblicz długość cięciwy CD .
3. Dana jest liczba całkowita n większa od 3. Udowodnij, że suma cyfr liczby $n^2 \cdot (n^2 - 9)$ nie jest równa sumie cyfr liczby $(n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$.
4. Na 34 polach szachownicy o wymiarach 9 pól na 7 pól ustawiono pionki. Udowodnij, że w pewnym kwadracie składającym się z 9 pól znajduje się co najmniej 5 pionków.
5. Dany jest sześcian o krawędzi długości 2, którego wierzchołki $A, B, C, D, A', B', C', D'$ oznaczono w sposób przedstawiony na rysunku. Płaszczyzna przechodząca przez środki krawędzi $CC', C'D', D'A'$ rozcina ten sześcian na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

