

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
5 czerwca 2023 r.

-
- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
 - Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru.
 - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
 - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegać będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.
 - Czas na rozwiązanie zadań: **90 minut**.
-

Zadanie 1. Danych jest 2023 różnych liczb całkowitych takich, że iloczyn dowolnych trzech z nich jest liczbą dodatnią. Udowodnij, że każda z danych liczb jest dodatnia.

Zadanie 2. Punkt D leży wewnątrz boku AB trójkąta ABC , a punkt E leży wewnątrz odcinka CD , przy czym

$$|AD| = |DC|, \quad |BD| = |BE| = |EC|, \quad \text{oraz} \quad \angle BDC = 70^\circ.$$

Wyznacz miary kątów w trójkącie ABC .

Zadanie 3. Dane są takie liczby całkowite x, y , że liczby $3x + 7y$ i $7x + 3y$ dają te same reszty z dzielenia przez 37. Udowodnij, że liczby x i y również dają te same reszty z dzielenia przez 37.

Zadanie 4. Odcinki AB i CD są podstawami trapezu $ABCD$, przy czym $|AB| \neq |CD|$. Na boku BC obrano taki punkt K , że pole trójkąta KAD jest równe sumie pól trójkątów KAB i KCD . Wykaż, że $|KB| = |KC|$.

Zadanie 5. Na każdym polu szachownicy o wymiarach 6×6 ustawiono dokładnie jeden pionek – biały lub czarny. Okazało się, że rozmieszczono tyle samo pionków białych, co czarnych, a w każdym kwadracie o wymiarach 2×2 znajduje się co najmniej jeden pionek każdego koloru. Udowodnij, że w pewnym kwadracie o wymiarach 2×2 znajdują się dokładnie dwa pionki białe i dwa czarne.