Koło matematyczne.
zestaw 21/2016/2017

1. Wiedząc, że $9|a^2+ab+b^2$ udowodnij, że $3|a$ i $3|b$.

2. Ciąg $x_1, x_2, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich jest określony rekurencyjnie w następujący sposówb: liczba x_{n+1} powstaje z liczby x_n poprzez dodanie do niej wartości liczbowej pewnej niezerowej cyfry zapisu dziesiętnego liczby x_n. Rozstrzygnij, czy tak określony ciąg $x_1, x_2, \ldots$ może składać się jedynie z liczb nieparzystych.

3. Dany jest zbiór S na płaszczyźnie. Punkt $A \in S$ nazwiemy punktem widokowym zbioru S jeśli dla każdego punktu $X \in S$ odcinek AX jest zawarty w S. Wykaż, że jeżeli punkty A i B są punktami widokowymi zbioru S, to każdy punkt odcinka AB jest także punktem widokowym zbioru S.

4. Znaleść 100-wyrazowy, niestały, ciąg arytmetyczny liczb całkowitych dodatnich, w którym każde dwa wyrazy są względnie pierwsze.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu przecięcia jego przekątnych na porste BC i DA. Punkty M i N są środkami boków AB i CD. Wykaż, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN.

6. Dany jest wielomian W stopnia n taki, że dla każdej liczby całkowitej m liczba $W(m)$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że istnieją liczby całowite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$W(x) = a_n \binom{x}{n} + a_{n-1} \binom{x}{n-1} + \ldots + a_0 \binom{x}{0},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x i liczby całkowitej dodatniej n definiujemy

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!} \quad \text{oraz} \quad \binom{x}{0} = 1.$$