

Koło matematyczne.

zestaw 23/2016/2017

1. Dane są takie liczby wymierne p, q, r , dla których $pq + qr + rp = 1$. Wykaż, że liczba

$$\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)}$$

jest wymierna.

2. Punkty K, L, M, N leżą odpowiedni na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$ o boku 1. Wyznacz najmniejszy możliwy obwód czworokąta $KLMN$.
3. Dane są liczby 1,2,3,4,5,6. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu liczby 1 do pewnych dwóch spośród tych liczb. Postępowanie to kontynuujemy. Czy możemy w ten sposób otrzymać ciąg składający się z sześciu równych liczb?

4. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu r . W każdy z kątów trójkąta wpisano okrąg styczny zewnętrznie do okręgu wpisanego. Udowodnij nierówność

$$r \leq r_1 + r_2 + r_3,$$

gdzie r_1, r_2, r_3 są promieniami tych trzech okręgów.

5. Czworoscian foremny o krawędzi a przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch skośnych krawędzi i przechodzącą w odległości $\frac{1}{2}a$ od jednej z tych krawędzi. Oblicz objętość brył otrzymanych w wyniku tego przecięcia.
6. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < 10.$$

Udowodnij, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt.