

Koło matematyczne.

zestaw 24/2016/2017

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

2. Każdy punkt koła domkniętego o promieniu 1 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość wynosi 1.

3. liczby x_1, x_2, \dots, x_{100} są dodatnie i ich suma wynosi 1. Udowodnij, że

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{99}x_{100} < \frac{1}{4}.$$

4. Długości boków czworokąta opisanego na okręgu wynoszą a, b, c, d . Wiadomo, że na tym okręgu można opisać okrąg. Udowodnij, że pole tego czworokąta wynosi \sqrt{abcd} .

5. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD . Punkty O_1, O_2, O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF, ADF . Udowodnij, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB .

6. Liczby naturalne a, b, c są związane zależnością

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem tych liczb. Udowodnij, że iloczyn $abcd$ jest kwadratem liczby naturalnej.