

Koło matematyczne.
zestaw 26/2016/2017

1. Udowodnij, że 38 jest największą liczbą parzystą, która nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych.
2. Udowodnij, że w ciągu $1, 31, 331, 3331, \dots$ jest nieskończenie wiele liczb złożonych.
3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle ACB = 45^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB . Wykaż, że

$$\frac{CM}{AB} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

4. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $n^n - n^2 + n - 1$ jest podzielna przez $(n - 1)^2$.
5. Na szachownicy 9×9 ustawiono 9 wież w taki sposób, że żadne dwie nie biją się. Następnie każdą wieżę przestawiono inne pole ruchem konika szachowego. Wykaż, że po tym przestawieniu pewne dwie wieże biją się.
6. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ odłożono odcinki AK, BL, CM, DN jednakowej długości. Udowodnij, że jeśli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to także czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.