

Koło matematyczne.

zestaw 27/2016/2017

1. Udowodnij, że dla dodatniej liczby całkowitej m liczba $m(m+1)$ nie jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1.
2. Udowodnij nierówności

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r},$$

gdzie h_1, h_2 to wysokości trójkąta, a r promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Sześciokąt $ABCDEF$ ma równe kąty. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz sześciokąta od prostych AB, CD, EF nie zależy od wyboru tego punktu.
4. W lewe dolne pole szachownicy 8×8 wpisano liczbę -1 , a w pozostałe pola liczbę 1 . W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb występujących w pewnej kolumnie lub wierszu. Rozstrzygnij, czy można po skończonej liczbie takich operacji otrzymać w prawym górnym polu liczbę -1 a w pozostałych polach liczbę 1 ?
5. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich równanie

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

6. Dwusieczne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F . Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Udowodnij, że punkty D', E', F', H leżą na jednym okręgu.