

Koło matematyczne.

zestaw 4/2016/2017

1. Dany jest trójkąt ABC . Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wiadomo, że $AC + AO = BC$. Jaki jest stosunek kąta przy wierzchołku A do kąta przy wierzchołku B .
2. Dwie półproste o wspólnym początku w punkcie P są styczne do okręgu o w punktach A i B . Punkt C należy do odcinka AB . Prosta k przechodzi przez C oraz przez środek okręgu o . Prosta przechodząca przez C i prostopadła do prostej k przecina półproste PA i PB odpowiednio w punktach D i E . Wykazać, że $CD = CE$.
3. Rozstrzygnij, czy kwadrat o wymiarach 14×14 można rozciąć na prostokąty o wymiarach 2×5 , 1×10 oraz 3×9 .
4. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$ oraz $\angle EAB = \angle ABC = \angle CDE$. Wykaż, że w pięciokąt $ABCDE$ można wpisać okrąg.
5. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b o następującej własności; dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczby $ak + 2$ oraz $bk + 3$ nie są względnie pierwsze. Udowodnij, że $3a = 2b$.
6. Wyznacz wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x , spełniająca warunki:

$$1 + x + \dots + x^{m-1} \quad \text{dzieli się przez } n$$

$$1 + x + \dots + x^{n-1} \quad \text{dzieli się przez } m$$