

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
1 czerwca 2024 r.

-
- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
 - Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru.
 - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
 - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegać będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.
 - Czas na rozwiązanie zadań: **90 minut**.
-

Zadanie 1. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD zachodzi

$$\angle BCD = 135^\circ, \quad \angle CDA = 120^\circ, \quad |AD| = |DC| = 2.$$

Wyznacz długość odcinka AB .

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c liczba

$$(a + b + c) \cdot (a - b) \cdot (b - c) \cdot (c - a)$$

jest podzielna przez 6.

Zadanie 3. Rozważamy szachownicę o wymiarach 7×7 , w której pola w narożnikach są czarne. Policz, ile jest prostokątów złożonych z pól tej szachownicy, zawierających dokładnie 4 czarne pola. Odpowiedź należy uzasadnić.

Zadanie 4. Dany jest walec o wysokości 1 i promieniu podstawy 1. Kwadrat $ABCD$ ma dwa wierzchołki na okręgu będącym brzegiem dolnej podstawy tego walca i dwa wierzchołki na okręgu będącym brzegiem górnej podstawy tego walca. Długość boku tego kwadratu jest większa od 1. Wyznacz pole kwadratu $ABCD$.

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x \cdot y}.$$