

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. S. Staszica w Warszawie

(29 maja 2017 r.)

Uwagi

- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
 - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
 - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegał będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.
-

1. Wyznacz wszystkie pary (a, b) nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których

$$\sqrt[4]{a \cdot b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

2. Wykaż, że jeżeli liczby a, b są całkowite, to liczba

$$(a + b)^4 - (a - b)^4$$

jest podzielna przez 16.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$. Okrąg o leży na zewnątrz kwadratu i jest styczny do odcinka AB oraz do prostych BD i AD . Wykaż, że średnica okręgu o jest równa długości przekątnej kwadratu $ABCD$.

4. Dany jest $(2n)$ -ką foremny, gdzie $n \geq 2$ jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Ile jest trójkątów prostokątnych nierównoramiennych, których wierzchołki są wierzchołkami tego $(2n)$ -kąta? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dany jest sześcian o krawędzi 1. Sfera s leży wewnątrz tego sześcianu, jest styczna do trzech jego ścian o wspólnym wierzchołku i przechodzi przez środek sześcianu. Oblicz promień sfery s .