

# Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. S. Staszica w Warszawie

(28 maja 2018 r.)

---

## Uwagi

- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
  - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
  - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegał będzie tok rozumowania oraz obliczenia prowadzące do uzyskanego wyniku.
- 

1. Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby  $a$ ,  $b$  są całkowite, to liczba

$$\frac{a^4 + b^4}{a + b} + \frac{a^2 + b^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

jest także całkowita.

2. Wyznacz najmniejszą nieparzystą liczbę  $n > 1$ , dla której liczba  $n^2 - 1$  jest podzielna przez 121.

3. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ$ . Udowodnij, że

$$BC + CD + DA < AB\sqrt{2}.$$

4. Każdy punkt okręgu pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Okazało się, że każda średnica tego okręgu ma końce różnych kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt, którego wierzchołki są tego samego koloru i którego co najmniej jeden z kątów ma miarę  $45^\circ$ .

5. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątego ma długość równą wysokości jego podstawy. Wiedząc, że pole podstawy ostrosłupa jest równe 1, wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.