Kółko matematyczne dla kandydatów

Zestaw 1

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72 \\ (y+z)(x+y+z) = 120 \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

3. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Żarówki, których jest 1000 i które są ponumerowane liczbami od 1 do 1000, są włączane i wyłączane specjalnym przełącznikiem. Kolejne k-te naciśnięcie przełącznika zmienia stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapala wszystkie żarówki. Drugie naciśnięcie gasi wszystkie żarówki o numerach parzystych. Po trzecim użyciu przełącznika świecą się żarówki o numerach nieparzystych i jednocześnie niepodzielnych przez 3 oraz o numerach parzystych i podzielnych przez 3. Pod koniec dyskoteki okazało się, że Kazio naciskał przełącznik 1000 razy. Które żarówki świeciły się po zakończeniu dyskoteki?

4. Czy istnieją takie dwie liczby x i y, aby jednocześnie zachodziły równości:

$$x(y-x) = 3, \quad y(4y-3x) = 2.$$

   Odpowiedź uzasadnij.

5. Punkt C leży wewnątrz odcinka AB. Niech okręgi o_1, o_2 i o będą okręgami o średnicach odpowiednio AC, BC i AB. Prosta k przechodzi przez punkt C i przecina okręgi w pięciu punktach D, E, C, F, G, położonych w wymienionej kolejności. Wykaż, że odcinki DE i FG mają równe długości.

6. Pewna liczba naturalna w układzie dziesiętnym ma postać $x0yz$, gdzie x, y, z są cyframi, $x > 0$. Liczba ta podzielona przez pewną liczbę naturalną n daje iloraz, który w układzie dziesiętnym jest postaci xyz. Znaleźć x, y, z i n.

7. Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o sześciu ścianach i siedmiu wierzchołkach.