Koło matematyczne.
15 grudnia 2014

1. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu r. Styczne do tego okręgu równoległe do boków trójkąta odcinają od niego trzy małe trójkąty. Okręgi wpisane w te trójkąty mają promienie r_1, r_2 i r_3. Udowodnić, że $r_1+r_2+r_3 = r$.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że liczba $2^n - n$ dzili się przez p.

3. W turnieju uczestniczy n graczy; każdych dwóch gra ze soba co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze soba wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów jest niewieksza od $\frac{n^2}{4}$.

4. W każdej z trzech szkół uczy sie n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych dwóch szkołach razem co najmniej $n+1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

5. Udowodnij, że
$$NWD(a^m - 1, a^n - 1) = a^{NWD(m,n)} - 1$$
dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $a > 1$, m, n.

6. Niech a i b będą nieparzystymi liczbami naturalnymi. Definiujemy rekurencyjnie ciąg (f_n) w następujący sposób: $f_1 = a$, $f_2 = b$, natomiast f_n dla $n \geq 3$ jest największym nieparzystym dzielnikiem sumy $f_{n-1} + f_{n-2}$. Udowodnij, że (f_n) jest od pewnego momentu stały. Wyznaczyć tę stałą wartość w zależności od wyrazów początkowych a i b.