Koło matematyczne.
24 listopada 2014

1. Udowodnić, że jeśli liczby całkowite a i b spełniają równanie $2a^2 + a = 3b^2 + b$, to liczby $a - b$ i $2a + 2b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + 3 \cdot \sqrt{\binom{n}{3}} + \ldots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1} \cdot n^3}.$$

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC$. symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie M leżącym na odcinku AB. Udowodnić, że $AC = BD$.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg o o średnicy AB przecina odcinki BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Styczne do okręgu o w punktach D i E przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że proste CP i AB są prostopadłe.

5. Dla liczby naturalnej n niech $r(n)$ oznacza sumę reszt z dzielenia liczby n kolejno przez liczby $1, 2, 3, \ldots, n$. Udowodnić, że $r(k) = r(k-1)$ dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych k.

6. Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n zachodzi

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3} < \frac{2}{3},$$

gdzie $g(k)$ oznacza największy nieparzysty dzielnik liczby k.