Koło matematyczne.

27 października 2014

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\frac{1}{2}.$$

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle A=90^\circ$ oraz $AB=AC$. Punkty D i E leżą na boku AC, przy czym $AD=CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BD przecina bok BC w punkcie P. Wykaż, że $\measuredangle PEC=\measuredangle BDA$.

3. Zmazujemy pierwszą cyfrę (najbardziej znaczącą) liczby 7^{2014} i dodajemy ją do liczby, która została (po zmazaniu pierwszej cyfry). Proces ten powtarzamy, aż zostanie liczba o dziesięciu cyfrach. Udowodnij, że występują w niej dwie identyczne cyfry.

4. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy z nich są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnij, że te wszystkie punkty są zawarte w trójkącie o polu ≤ 4.

5. Każda krawędź wielościanu wypukłego została pomalowana jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje wierzchołek A oraz płaszczyzna, przechodząca przez A i niezawierająca innych wierzchołków wielościanu, o tej własności,że po każdej jej stronie wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka A mają jednakowy kolor.

6. Niech $f_i(x)$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$ będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że dla pewnego całkowitego a wszystkie liczby $f_i(a)$ są złożone.