**Koło matematyczne**.
3 listopada 2014

1. W trójkącie $ABC$ poprowadzono wysokość $CP$. Udowodnić, że rzuty punktu $P$ na boki $BC$ i $AC$ oraz na wysokości $BQ$ i $AR$ są współliniowe.

2. Dana jest nieograniczona szachownica. Na każdym jej polu napisano liczbę całkowitą, przy czym każda liczby występuje tylko raz. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieją takie dwa sąsiednie pola, że liczby napisane na tych polach różnią się o więcej niż $k$.

3. W romb $ABCD$ wpisano okrąg $o$ styczny do boku $AB$ w punkcie $K$. Styczna do tego okręgu przecina boki $CD$ i $BC$ odpowiednio w punktach $Q$ i $P$. Udowodnij, że proste $KP$ i $AQ$ są równoległe.

4. Danych jest $nm+1$ parami różnych dodatnich liczb całkowitych. Udowodnij, że można wybrać $m+1$ z nich, tak żeby żadna wybrana nie dzieliła żadnej z pozostałych wybranych, lub $n+1$ tak, żeby każda wybrana dzieliła następną.

5. Danych jest $m$ liczb całkowitych. W jednym ruchu możemy wybrać spośród nich $n$ liczb i każdą zwiększyć o 1. Dla jakich liczb $m$ i $n$ można przy pomocy takich ruchów doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie napisane liczby będą równe.

6. W trójkąt $ABC$ wpisano okrąg o środku w punkcie $I$. Dwusieczna $AI$ przecina okrąg przechodzący przez punkty $B, C, I$ w punktach $D$ oraz $I$, dwusieczna $BI$ przecina okrąg przechodzący przez punkty $A, C, I$ w punktach $E$ oraz $I$, dwusieczna $CI$ przecina okrąg przechodzący przez punkty $B, A, I$ w punktach $F$ oraz $I$. Wyznacz największą możliwą wartość iloczynu
$$\frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF}.$$