

**Koło matematyczne.**

zestaw 10/2015/2016

1. Wyznaczyć wszystkie trójki  $(a, b, c)$  liczb całkowitych dodatnich, dla których

$$a|b+c, \quad b|c+a, \quad c|a+b.$$

2. Czworokąt wypukły  $ABCD$  jest wpisany w okrąg o środku  $O$ . Proste  $BC$  i  $DA$  przecinają się w punkcie  $P$ . Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami odcinków  $BC$  i  $DA$ . Punkty  $E$  i  $F$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $O$  i  $P$  na prostą  $MN$ . Udowodnij, że  $ME = NF$ .
3. Dane są dwa ciągi:  $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n+1}$ ,  $a_1 = 1$  oraz  $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{b_n}$ ,  $b_1 = 1$ . Udowodnić, że  $b_{n+1} = a_{2^n}$ .
4. Czy liczba  $2^n$  może się zaczynać od 999...?
5. W czworokącie  $ABCD$  dane są  $\angle DAC = 40^\circ$ ,  $\angle DCA = 70^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$  oraz  $\angle BCA = 80^\circ$ . Udowodnij, że przekątne tego czworokąta są prostopadłe.
6. Liczby  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta. Udowodnij, że

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$