

## Koło matematyczne.

zestaw 13/2015

1. Danych jest 26 kolejnych liczb naturalnych. Okazało się, że suma pewnych dziesięciu z nich jest liczbą pierwszą. Wykaż, że suma pozostałych szesnastu liczb jest liczbą złożoną.
2. Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D$  i  $E$  są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków  $A$  i  $B$ . Punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $A$  i  $B$  na prostą  $DE$ . Udowodnij, że  $PE = DQ$ .
3. Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym  $AB = BC$  oraz  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ . Wewnątrz niego obrano taki punkt  $X$ , że  $AX \perp BE$  oraz  $CX \perp BD$ . Udowodnić, że  $BX \perp DE$ .
4. Dowieść, że wśród wyrazów ciągu  $(a_n)$ , zadanego wzorem

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \lceil (3/2)a_n \rceil, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

występuje nieskończenie wiele wyrazów parzystych oraz nieskończenie wiele wyrazów nieparzystych.

5. Dwaj gracze na przemian piszą na tablicy liczby ze zbioru  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Zabronione jest napisanie liczby będącej dzielnikiem liczby już znajdującej się na tablicy. Gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Który z graczy ma strategię zwycięską?
6. Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Pokazać, że

$$(n+1) \cdot NWW \left( \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right) = NWW(1, 2, \dots, n+1).$$