Koło matematyczne.
zestaw 14/2015

1. Rozstrzygnąć na ile sposobów liczbę 79 można przedstawić jako sumę trzech liczb całkowitych dodatnich będących trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

2. Dane są liczby rzeczywiste $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

3. Niech a i b będą nieujemnymi liczbami całkowitymi, zaś p niech będzie liczbą pierwszą. Udowdnij, że
$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}.$$

4. Na przyjęciu spotkało się $n > 10$ osób. Okazało się, że wśród dowolnych dziesięciu z nich istnieją trzy, z których każda zna dwie z pozostałych. Wykazać, że spośród wszystkich osób na przyjęciu można wyłonić osiem tak, aby każda z pozostałych znała przynajmniej jedną osobę z wybranej ósemki.

5. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC, przy czym
$$\measuredangle BCD - \measuredangle ACD = 90^\circ.$$
Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Obliczyć długość odcinka PM, wiedząc, że $BC = a$ oraz $AC = b$.

6. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ znajduje się punkt O, z którego każdy bok sześciokąta widać pod kątem 60°, a ponadto
$$OA > OC > OE \quad \text{oraz} \quad OB > OD > OF.$$
Udowodnij, że
$$AB + CD + EF < BC + DE + FA.$$