

Koło matematyczne.

zestaw 14/2015/2016

1. Po przepłynięciu dwóch kilometrów rzeką pod prąd, pływak napotkał płynącą z prądem butelkę. Płynął jeszcze przez pół godziny, zawrócił i dogonił butelkę dokładnie w tym momencie, w którym dotarł do punktu wyjścia. Oblicz prędkość rzeki.

2. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < 2.$$

3. Pokazać, że

$$3 \max \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\} \geq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c .

4. Każdy wyraz ciągu jest a_1, a_2, \dots jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej. Ponadto dla każdej liczby naturalnej n , różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą pierwszą lub kwadratem liczby pierwszej. Udowodnij, że ciąg a_1, a_2, \dots jest skończony.
5. Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie pięciokąta wypukłego, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym.
6. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki

$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$