Koło matematyczne.
zestaw 16/2015/2016

1. Gracze $G_1, G_2, \ldots, G_n$ rozegrali między sobą turniej tenisowy. Każdy gracz rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym graczem, oczywiście nie było remisów. Niech Z_i będzie liczbą zwycięstw gracza G_i i niech P_i będzie liczbą jego porażek. Udowodnić, że
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Pi^2.$$

2. Niech $a + b + c = 0$. Udowodnić, że
$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

3. Udowodnić, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$, to $abc \leq 1$.

4. Wykaż, że z każdego 9-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ można wybrać takie dwie liczby a i b, że liczba $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą.

5. Na bokach BC, CD, DA, czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BCE, CDF, DAG leżące po zewnętrznej stronie czworokąta. Niech M, N, P będą odpowiednio środkami odcinków AB, EF, FG. Udowodnij, że trójkąt MNP jest równoboczny.

6. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S punktów o następującej własności: dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 100$ istnieje prosta, która zawiera dokładnie k spośród danych punktów. Wykaż, że zbiór S składa się z co najmniej 2550 punktów.