

Koło matematyczne.

zestaw 1/2015/2016

1. Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym takim, że $AB = AC$. Dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie D takim, że $BC = BD + AD$. Wyznacz kąt A .
2. Oznaczmy przez a_1, a_2, \dots, a_n dowolną permutację liczb $1, 2, \dots, n$. Niech $f(n)$ będzie liczbą takich permutacji, w których
 - (i) $a_1 = 1$
 - (ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Czy liczba $f(1996)$ dzieli się przez 3?

3. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Czworokąt $BFG E$ jest kwadratem zbudowanym na zewnątrz kwadratu $ABCD$. Wykaż, że proste AE , CF i DG przecinają się w jednym punkcie.
4. Wyznacz wszystkie funkcje rosnące $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y .

5. Spośród wszystkich wierzchołków 20-kąta foremnego wybrano dziewięć. Udowodnij, że pewne trzy z wybranych punktów są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
6. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których

$$2^n | (3^n - 1).$$