Koło matematyczne.
zestaw 2/2015/2016

1. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania następującego układu równań w zbiorze liczb rzeczywistych:
$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

2. W kwadracie $ABCD$ punkty M i N są środkami boków AB i BC. Odcinki DN i CM przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że trójkąt APD jest równoramienny.

3. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $ab = cd$. Udowodnij, że liczba $a + b + c + d$ jest złożona.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.

5. Na każdym polu szachownicy 8×8 zapisano jedną z liczb $1, 2, 3, \ldots, 64$, przy czym wszystkie napisane liczby są różne. Udowodnij, że istnieją dwa sąsiednie pola szachownicy, na których zostały zapisane liczby o module różnicy większym lub równym 5.

6. Wyznacz największą liczbę całkowitą k, dla której 1991^k dzieli
$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$