Koło matematyczne.
zestaw 3/2015

1. Rzucamy $2n$ razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy serię orłów lub reszek długości co najmniej n.

2. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC obrano punkty A_1, B_1 i C_1 tak, że odcinki AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie. Proste A_1B_1 i A_1C_1 przecinają prostą równoległą do BC i przechodzącą przez punkt A w punktach B_2 i C_2. Udowodnić, że $AB_2 = AC_2$.

3. Niech (a_n) będzie ciągiem parami różnych liczb całkowitych dodatnich. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

4. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej i oraz liczby pierwszej p niech S_i będzie sumą wszystkich możliwych iloczynów i różnych czynników ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Udowodnij, że
$$S_1 \equiv S_2 \equiv \ldots \equiv S_{p-2} \equiv 0 (\operatorname{mod} p).$$

5. Liczby całkowite dodatnie a i b są względnie pierwsze. Udowodnij, że największy wspólny dzielnik liczb $a+b$ i a^2+b^2 nie przekracza 2.

6. Udowodnij nierówność dla liczb dodatnich
$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}.$$