Koło matematyczne.

zestaw 6/2015/2016

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (p, q, r) kolejnych liczb pierwszych, dla których suma $p^2 + q^2 + r^2$ jest liczbą pierwszą.

2. Dany jest ostrosłup $SA_1A_2 \dots A_n$ $(n \geq 3)$, w którym suma kątów płaskich przy wierzchołku S jest większa od kąta półpełnego. Wykazać, że każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest krótsza od połowy obwodu jego podstawy.

3. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć liczbę wszystkich rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych równania $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{n-1}\right]$.

4. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r. Punkty O, X, Y leżą w tej właśnie kolejności na symetralnej odcinka AB oraz wewnątrz kąta ACB, przy czym $OX \cdot OY = r^2$. Wykaż, że
$$\measuredangle ACY = \measuredangle XCB.$$

5. Ciąg $a_1, a_2, \dots$ liczb rzeczywistych jest określony przez warunek
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4 \quad \text{oraz} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots.$$
Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

6. Oznaczmy przez $f(n)$ tę liczbę całkowitą, która na osi liczbowej znajduje się najbliżej liczby $\sqrt{n}$. Oblicz
$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(10000)}.$$